2009.2

Programa de Pós-Graduação em Física - UFAL
Exame de Qualificação para o Doutorado
Mecânica Quântica - Setembro 2009

Questão 1

Considere uma partícula em um potencial do tipo poço quadrado infinito no qual $V(x) = 0$ para $0 \leq x \leq a$ e infinito fora desta região.
As soluções da equação de Schroedinger independente do tempo são dadas por

$$\Psi_n(x) = \sqrt{2/a}\; sen(\frac{n\pi}{a}x)$$

para os quais as auto-energias correspondem a

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2};$$

Agora suponha que uma partícula nesta região tem como função de onda inicial

$$\Psi(x,0) = A[\Psi_1(x) + e^{i\phi}\Psi_2(x)].$$

a) Encontre a constante de normalização A e determine a função de onda num instante qualquer $\Psi(x,t)$; (1,0 ponto)

b) Calcule os valores esperados da posição $\langle x\rangle$, do momento $\langle p\rangle$ e da energia $\langle H\rangle$ desta partícula em função do tempo. Analise em particular os casos de $\phi = 0, \pi/2$ e π. (1,5 pontos)

Questão 2

As três componentes de um operador vetorial de momento angular $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ satisfazem as relações de comutação $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$, $[J_y, J_z] = i\hbar J_x$ e $[J_z, J_x] = i\hbar J_y$. Os operadores não hermiteanos $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$, satisfazem as relações de comutação $[J_z, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm}$ e $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$ que, alternativamente, também podem ser utilizadas para caracterizar a álgebra típica de operadores de momento angular.

Sejam a e b dois operadores não hermiteanos, satisfazendo com seus respectivos adjuntos $a^\dagger$ e $b^\dagger$ as relações de comutação

$$[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1; \quad [a, b] = [a, b^\dagger] = [a^\dagger, b] = [a^\dagger, b^\dagger] = 0 \quad .$$

e que, portanto, representam os operadores de levantamento e abaixamento de dois osciladores harmônicos desacoplados.

a) Mostre, utilizando as relações de comutação entre os operadores de levantamento e abaixamento de osciladores harmônicos, que os operadores

$$J_+ = \hbar a^\dagger b; \quad J_- = J_+^\dagger = \hbar b^\dagger a; \quad J_z = \frac{\hbar}{2}\left(a^\dagger a - b^\dagger b\right)$$

satisfazem relações de comutação de momento angular. (1,0 ponto)
b) Construa o operador $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ em termos de a, b e de seus adjuntos. (1,0 ponto)

c) Os operadores $N_a = a^\dagger a$ e $N_b = b^\dagger b$ tem como autovalores os números inteiros. A partir deste fato, mostre que os autovalores do operador J^2 podem ser escritos como $\hbar^2 j(j+1)$, onde j pode ser qualquer número inteiro ou semi-inteiro ($j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, ...$). (0,5 ponto).

Questão 3

Considere um sistema unidimensional composto de duas partículas. Suponha que ambas as partículas encontram-se no mesmo estado quântico de spin, mas em estados quânticos espaciais distintos $\Psi_a(x)$ e $\Psi_b(x)$ (ortogonais e normalizados). Se as duas partículas são distinguíveis, a função de onda espacial do sistema é dada por

$$\Psi_d(x_1, x_2) = \Psi_a(x_1)\Psi_b(x_2),$$

na qual a partícula 1 encontra-se no estado a e a partícula 2 no estado b. Se estas partículas são bosons idênticos, a função de onda composta é espacialmente simétrica com relação à permutação das partículas, assumindo a forma:

$$\Psi_+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_a(x_1)\Psi_b(x_2) + \Psi_b(x_1)\Psi_a(x_2)];$$

enquanto que para o caso de fermions idênticos a função de onda é espacialmente anti-simétrica

$$\Psi_-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_a(x_1)\Psi_b(x_2) - \Psi_b(x_1)\Psi_a(x_2)].$$

a) Mostre que, para o caso de partículas distinguíveis, a distância quadrática média entre as partículas pode ser escrita como $\langle(x_1 - x_2)^2\rangle_d = \langle x^2\rangle_a + \langle x^2\rangle_b - 2\langle x\rangle_a\langle x\rangle_b$. (1,0 ponto) $[\langle f(x)\rangle_i = \int f(x)|\Psi_i(x)|^2 dx \; ; (i \equiv d, a, b)]$

b) Mostre que, para bosons e fermions indistinguíveis, $\langle(x_1 - x_2)^2\rangle_\pm = \langle(x_1 - x_2)^2\rangle_d \mp 2|\langle x\rangle_{ab}|^2$, onde $\langle x\rangle_{ab} = \int x\Psi_a(x)^*\Psi_b(x)dx$. (1,0 ponto)

c) Use o resultado do ítem anterior para explicar por que numa ligação química covalente os elétrons compartilhados ocupam um estado singleto com spin total nulo. (0,5 ponto)

Questão 4

Considere uma partícula de massa m que é livre para mover-se ao longo de uma circunferência de comprimento L.

a) Mostre que os estados estacionários podem ser escritos na forma

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{2\pi i n x/L} \quad ; \quad (-L/2 < x < L/2),$$

onde $n = 0, \pm1, \pm2, ...$, e as energias permitidas são $E_n = \frac{2}{m}\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2$. (0,5 ponto) [Note que, com exceção do nível de energia fundamental ($n = 0$), todos os outros níveis de energia são duplamente degenerados].

b) Agora considere uma perburbação na forma $H' = -V_0 e^{-x^2/a^2}$, onde $a << L$. Use teoria de perburbação para estados não degenerados para encontrar a correção em primeira ordem em V_0 na energia do estado fundamental. (1,0 ponto)

c) A perturbação acima quebra a degenerescência dos estados excitados. Use teoria de perturbação para estados degenerados para encontrar a correção em primeira ordem em V_0 na energia dos estados excitados. (1,0 ponto)

Para calcular as integrais neste problema, explore o fato de que $a << L$ para extender os limites de integração de $\pm L$ para $\pm\infty$. Quando necessário, complete o quadrado perfeito na função exponencial e, após uma mudança apropriada de variável, use que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} du = \sqrt{\pi/\alpha}$.